

8 Oplossen van het circuit met Laplace transformatie.....	1
8.1 Wat is de juiste betekenis van Laplace transformatie? .....	1
8.2 De complexe vorm van de Fourier Integraal .....	2
8.3 Het opstellen van de vergelijking.....	3
8.4 Wanneer de Switch gesloten is.....	4
8.5 Oplossing met EXEL.....	10
8.6 Wanneer de Switch open is .....	13
8.7 Het oplossen van deze vergelijkingen zonder voorkennis.....	23

## 8 Oplossen van het circuit met Laplace transformatie.

### 8.1 Wat is de juiste betekenis van Laplace transformatie?

Het is maar al te gemakkelijk om Laplace transformatie te definiëren als

$$L\{F(t)\} = f(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt \quad (8.1.1)$$

waarin  $p = \alpha + j \cdot \beta$  en daarbij simpelweg te verklaren dat hierdoor het tijdsdomein omgezet is in een frequentie domein zonder verder iets uit te leggen waarom dit zo is. En de meeste wiskunde boeken doen in feite niets anders dan juist dit. Zelfs een gerespecteerd werk als “Shaum’s outline series theory and problems of LAPLACE TRANSFORMS” begint precies zoals hierboven aangehaald.

Zie hier een beetje meer uitleg hierover.

De Laplace Transform is een logische voortzetting van de Fourier Analyse, immers nadat we ons hebben bezig gehouden met de Fourier Analyse zijn we tot de conclusie gekomen dat

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) \right) \quad (8.1.2)$$

En dat we hiermee een functie in het tijdsdomein  $F(t)$  kunnen bepalen als een som van een aantal *cosinussen* en *sinussen*. Noteer dat ook hier we iedere

$a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L}\right) = c_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot t}{L} + n\gamma\right)$  kunnen schrijven. Maar hierin is  $n$  nog steeds een

discreet getal, en  $c_n$  zijn een discreet aantal lijnen die de amplitude aanduiden van een bepaalde

frequentie  $\sin\left(\frac{n\pi t}{L} + n\gamma\right)$ . Maar als  $n \Rightarrow \infty$  dan komen al die spectraallijnen dichter en dichter bij elkaar te liggen. Ook weten we als  $n$  nadert tot  $\infty$  dan wordt de som niets anders dan een integraal.

Wanneer men (voorlopig) geen rekening houden met de eerste term  $\frac{a_0}{2}$ , die niets anders dan een DC offset weergeeft, en met de wetenschap (zie de formules van Euler) dat  $a_n \cdot \cos(\omega t) + b_n \cdot \sin(\omega t) = c_n \cdot e^{j\omega t}$  dan is het te begrijpen dat we formule (8.1.1) kunnen schrijven als

$$L\{F(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot f(t) \cdot dt. \text{ Hierin is } c_n = f(t), \text{ immers een oneindig aantal amplitudes van}$$

spectraallijnen vormen, indien we de toppen met elkaar verbinden, niets anders dan een functie, maar ditmaal van frequenties. Uit die curve kunnen we dus de amplitudes bepalen van alle frequenties die deel uitmaken om de functie in het tijdsdomein te genereren zonder enige rimpel of onnauwkeurigheid.

## 8.2 De complexe vorm van de Fourier Integraal

We beginnen met de formules van Euler, die we allemaal op school hebben geleerd, namelijk

$$a \cdot \cos(\omega x) = a \cdot \frac{e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}}{2} \text{ en } b \cdot \sin(\omega x) = b \cdot \frac{e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}}{2 \cdot j} \text{ zodat}$$

$$a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) = a \cdot \frac{e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}}{2} + b \cdot \frac{e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}}{2 \cdot j} \text{ brengen we } j \text{ naar de teller met de}$$

kennis dat  $j \cdot j = -1$  dan wordt

$$a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) = a \cdot \frac{e^{j\omega x} + e^{-j\omega x}}{2} - jb \cdot \frac{e^{j\omega x} - e^{-j\omega x}}{2}$$

$$a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) = a \cdot \frac{e^{j\omega x}}{2} - jb \cdot \frac{e^{j\omega x}}{2} + a \cdot \frac{e^{-j\omega x}}{2} + jb \cdot \frac{e^{-j\omega x}}{2}$$

$$a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) = (a - jb) \frac{e^{j\omega x}}{2} + (a + jb) \frac{e^{-j\omega x}}{2}$$

Noemen we  $-a + jb = -2c$  voor  $b = -\omega$ . of wat hetzelfde is  $a - jb = 2c$  en zo ook  $a + jb = 2c$  voor  $b = \omega$ . . Noteer dit het optellen van vectoren is, dan kunnen we schrijven dat

$$\int a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) = \int (a - jb) \frac{e^{j\omega x}}{2} + \int (a + jb) \frac{e^{-j\omega x}}{2}$$

$$\int a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) = \int c \cdot e^{j\omega x} + \int c \cdot e^{-j\omega x}$$

$$\int_0^{\infty} a \cdot \cos(\omega x) + b \cdot \sin(\omega x) = \int_0^{\infty} c \cdot e^{j\omega x} + \int_0^{\infty} c \cdot e^{-j\omega x}$$

Als we nu  $\omega \Rightarrow -\omega$  invullen in de tweede term van de integraal dan is dat hetzelfde als integreren van  $-\infty \Rightarrow 0$  onze formule wordt

$$\int_0^{\infty} a \cdot \cos(\omega \cdot x) + b \cdot \sin(\omega \cdot x) = \int_{-\infty}^0 c \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} + \int_0^{\infty} c \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$$

$$\int_0^{\infty} a \cdot \cos(\omega \cdot x) + b \cdot \sin(\omega \cdot x) = 0 + \int_0^{\infty} c \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$$

$$\int_0^{\infty} a \cdot \cos(\omega \cdot x) + b \cdot \sin(\omega \cdot x) = \int_{-\infty}^{+\infty} c \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t}$$

Noteer dat hier in deze formule  $2 \cdot c = \sqrt{a^2 + b^2}$ .

Ik hoop dat met dit interim bewijs het duidelijk geworden is waarom het uitvoeren van deze integraal wel degelijk een functie weergeeft die iets zegt over het frequentiedomein waaruit de functie uit het tijdsdomein is samengesteld. Men kan nu aantonen dat er eenvoudige regels zijn om over te gaan van een functie in het tijdsdomein naar een Laplace getransformeerde frequentie domein. Men kan aantonen dat het oplossen van deze Laplace getransformeerde functie een eenvoudige algebraïsche functie is. Het grote probleem is nu dat om een oplossing te bekomen in het tijdsdomein men deze algebraïsche oplossing terug moet transformeren naar het tijdsdomein. Het is dit wat men de Inverse Laplace transformatie noemt. Dit maneuver vormt de grote struikelbrok, maar als men dit gevonden heeft blijkt dat de wiskundige bewerkingen merkelijk gemakkelijker zijn dan de differentiële vergelijking op te lossen volgens de algemene regels voor het oplossen van differentieel vergelijkingen.

Hoe dit in elkaar steekt is in praktisch ieder boek over Laplace transformaties uitvoerig beschreven, en moet dus door iedere student die hogere studie gedaan heeft als zeer bekend overkomen.

Mijn frustratie ligt hierin, dat wat hierboven beschreven is, praktisch nergens in die wiskunde boeken beschreven is. Men legt in die boeken, en dus ook in de klas, te veel uit hoe men met iets moet werken maar veel te weinig waarom iets als dusdanig werkt.

### 8.3 Het opstellen van de vergelijking

Voor de fijnproevers van de wiskunde gaan we hier de formules opstellen met gebruik makend van de Laplace transformatie.

## 8.4 Wanneer de Switch gesloten is

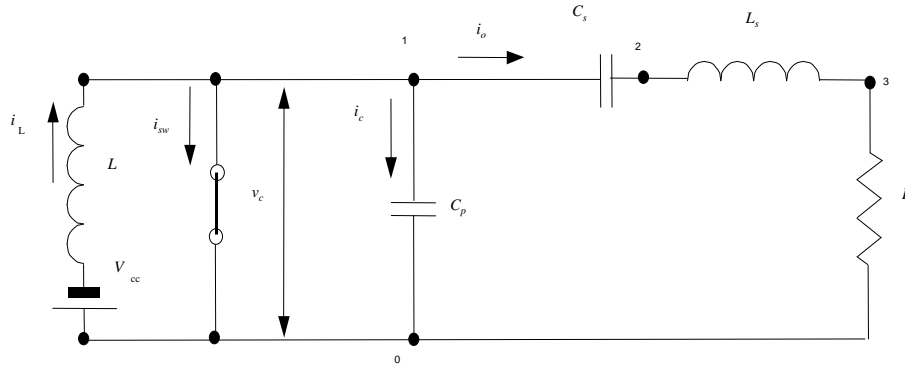


fig. 1

Wanneer de switch gesloten is dan is het schema zoals in

fig. 1 is voorgesteld. Noteer dat Laplace er vanuit gaat dat de initiële spanningen over de componenten mee moeten opgenomen worden in het schema. Die initiële waarden zijn de spanningen die over de componenten  $C_s$  en  $L_s$  ( en  $R$  ) staan op het ogenblik dat de te onderzoeken tijd begint, in ons voorbeeld is dit de tijd dat de switch zich sluit, en laten we deze tijd het tijdstip  $t = 0$  noemen. Nu moeten we even goed realiseren dat de spanning over een capaciteit niet alleen gelijk is aan

$$V_{cs} = \int \frac{i}{C_s} \cdot dt \text{ maar wel gelijk aan } V_{cs} = V_{cs(\text{ervoor})} + \int \frac{i}{C_s} \cdot dt \text{ en ook over een spoel is de spanning niet}$$

$$\text{gelijk aan } V_{Ls} = L_s \cdot \frac{di}{dt} \text{ maar wel } V_{Ls} = V_{Ls(\text{ervoor})} + L_s \cdot \frac{di}{dt} . \text{ Het is als het ware dat deze elementen een}$$

soort geheugen hebben, van de tijd afhankelijk, en de spanning daarbij optellen. Een weerstand daarentegen heeft zoiets niet, immers  $V_R = i \cdot R$  .

Vullen we hierin ook de Laplace operator in, namelijk vervangen we  $\int dt = \frac{1}{p}$  en  $\frac{d}{dt} = p$  dan kunnen

we, wanneer de Switch gesloten is, schrijven dat  $V_{cs} + V_{Ls} + V_R = 0$  . Vooraleer we verder gaan moet

hier enkele bewijzen geleverd worden om te kunnen begrijpen waar  $\frac{V_{cs}(0)}{p}$  en  $-Li(0)$  vandaan komen.

**8.4.1 Bewijs dat** 
$$L\left\{\frac{d[f(t)]}{dt}\right\} = p \cdot f(p) - f(0)$$

Indien we de definitie zoals opgesteld in formule (0) toepassen op onze nieuwe formule dan is

$$L\left\{\frac{d[f(t)]}{dt}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{d[f(t)]}{dt} \cdot e^{-p \cdot t} dt$$

dit nu is een integraal van de vorm  $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$

Hierin is  $u = e^{-p \cdot t}$  en  $dv = \frac{d[f(t)]}{dt}$  zodat  $v = f(t)$  wordt en  $du = \frac{-p \cdot e^{-p \cdot t}}{dt}$  dit ingevuld geeft ons

$$L\left\{\frac{d[f(t)]}{dt}\right\} = e^{-p \cdot t} \cdot f(t) \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} -p \cdot e^{-p \cdot t} f(t) dt$$

en uitgewerkt bekomen we  $L\left\{\frac{d[f(t)]}{dt}\right\} = 0 - 1 \cdot f(0) + p \cdot \int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} f(t) dt$  hierin zien we dat volgens de

definitie  $\int_0^{\infty} e^{-p \cdot t} f(t) dt = f(p)$  zodat uiteindelijk we bekomen dat

$$L\left\{\frac{d[f(t)]}{dt}\right\} = p \cdot f(p) - f(0) \quad (8.4.1)$$

**8.4.2 Bewijs dat** 
$$L\left\{\int_0^t f(t) \cdot dt\right\} = \frac{f(p)}{p}$$

Zij  $g(t) = \int_0^t f(t) \cdot dt$  dan is natuurlijk  $g(0) = 0$  en per definitie

$$\frac{d[g(t)]}{dt} = f(t).$$

Nemen we langs beide kanten de Laplace transformatie met wat we hiervoor hebben gedefinieerd wordt dit

$$L\left\{\frac{d[g(t)]}{dt}\right\} = L\{f(t)\}$$

$$p \cdot g(p) - g(0) = f(p) \text{ en met } g(0) = 0$$

$$p \cdot g(p) = f(p)$$

$$g(p) = \frac{f(p)}{p}$$

En vullen we hierin terug het omgekeerde in namelijk  $g(p) = L\left\{\int_0^{\infty} f(t) \cdot dt\right\}$  dan bekomen we

$$\text{uiteindelijk } L\left\{\int_0^{\infty} f(t) \cdot dt\right\} = \frac{f(p)}{p}$$

Noteer dat op soortgelijke wijze we tot de conclusie komen dat  $L\{V_{cc}\} = \frac{V_{cc}}{p}$  en natuurlijk ook dat

$L\{I_{dc}\} = \frac{I_{dc}}{p}$  indien men aanneemt dat  $V_{cc}$  en  $I_{dc}$  geen constanten zijn maar wel step-functies, dit wil

zeggen dat op een bepaald ogenblik in de tijd de functie  $V_{cc}$  of  $I_{dc}$  de waarde 0 hadden en dan plots naar de waarde  $V_{cc}$  of  $I_{dc}$  gesprongen zijn. Soms schrijft men daarom die functies als  $V_{cc}(t)$  en  $I_{dc}(t)$  om duidelijk aan te tonen dat dit geen constanten zijn.

De hierboven aangehaalde bewijzen zijn niets anders dan wiskunde op zijn puurst, en de relatie tot de fysische werkelijkheid is volkomen zoek. Maar het werkt, en daarom kunnen we het gebruiken. Maar ik begrijp zeer goed waarom vele enthousiaste elektronica liefhebbers hierop afknakken, en gefrustreerd hun interesse aan het doorgronden van elektronische circuits opgeven. Voornamelijk als in het een of ander degelijk werk, men met een zekere lichtzinnigheid over formules stappen, en besluiten met zoiets in de trend van "en dit lossen we dan even op met de Laplace transformatie, met dit als eindresultaat."

Maar laten we nog even doorbijten, en we komen tot de conclusie dat deze formules tot dezelfde resultaten leiden als het oplossen van differentieel vergelijkingen zoals hiervoor uiteengezet.

We beginnen terug met onze eenvoudige waarneming dat in een gesloten kring is de som van de spanningen gelijk aan nul ofwel  $V_{cs} + V_{Ls} + V_R = 0$ .

Maar met de hierboven aangehaalde opmerkingen bekomen we dat

$$\frac{i}{C_s \cdot p} + \frac{V_c(0)}{p} + i \cdot L_s \cdot p - Li(0) + i \cdot R = 0$$

$$\frac{i}{C_s} + V_c(0) + i \cdot L_s \cdot p^2 - Li(0) \cdot p + i \cdot R \cdot p = 0$$

$$\frac{i}{C_s \cdot L_s} + \frac{V_c(0)}{L_s} + i \cdot p^2 - i(0) \cdot p + i \cdot \frac{R}{L_s} \cdot p = 0$$

Hieruit volgt 
$$\frac{i}{C_s \cdot L_s} + i \cdot p^2 + i \cdot \frac{R}{L_s} \cdot p = i(0) \cdot p - \frac{V_c(0)}{L_s}$$

Ofwel

$$i = \frac{i(0) \cdot p - \frac{V_c(0)}{L_s}}{p^2 + \frac{R}{L_s} \cdot p + \frac{1}{C_s \cdot L_s}} \quad (8.4.2)$$

Deze uitdrukking is van de vorm 
$$i = \frac{a_1 \cdot p + a_0}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}$$

Hierin is

$$a_1 = i(0); a_0 = \frac{-V_c(0)}{L_s}$$

$$b_2 = 1; b_1 = \frac{R}{L_s}; b_0 = \frac{1}{C_s \cdot L_s}$$

Nu komt het er op aan om deze formule  $i = \frac{a_1 \cdot p + a_0}{p^2 + b_1 p + b_0}$  op te splitsen in fractionele delen dusdanig

dat we een volgende uitdrukking bekomen. 
$$i = \frac{i(0) \cdot p}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{\frac{V_c(0)}{L_s}}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$$
. Waarom moet dat?

Om de eenvoudige reden dat een van de Inverse Laplacetransformatie formules, die ons terug een uitdrukking bezorgen vanuit het frequentie-domein naar het tijds-domein, ons zegt dat de volgende relatie bestaat:

$$\frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \Rightarrow e^{-\alpha t} \cdot \cos(\beta t) \quad (8.4.3)$$

en

$$\frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \Rightarrow e^{-\alpha t} \cdot \sin(\beta t). \quad (8.4.4)$$

Je moet het maar weten, maar deze formules staan meestal wel vermeld, en soms bewezen, in boeken zoals "Schaum's outline series, LAPLACE TRANSFORMS"

Proberen we eens de splitsing uit te voeren van de noemer, namelijk  $p^2 + b_1 p + b_0 \Rightarrow (p + \alpha)^2 + \beta^2$ .

Wel als we dit even uitwerken bekomen we.  $p^2 + b_1 p + b_0 \Rightarrow (p^2 + 2\alpha p + \alpha^2) + \beta^2$  hieruit volgt als dit hetzelfde moet zijn dat  $b_1 = 2\alpha$  ofwel  $\alpha = \frac{b_1}{2}$  en  $b_0 = \alpha^2 + \beta^2$  Vullen we hierin  $\alpha = \frac{b_1}{2}$  dan

bekomen we  $b_0 = \frac{b_1^2}{4} + \beta^2$  ofwel  $b_0 - \frac{b_1^2}{4} = \beta^2$  en  $\beta = \sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{4}}$

Vullen we de waarden van  $b_2; b_1; b_0$  in dan bekomen we eindelijk;

$$\alpha = \frac{R}{2.L_s} \text{ en } \beta = \sqrt{\frac{1}{L_s \cdot C_s} - \left(\frac{R}{2.L_s}\right)^2}$$

en dus kunnen we schrijven dat  $p^2 + b_1 p + b_0 = (p + \frac{b_1}{2})^2 + b_0 - \frac{b_1^2}{4} = (p + \alpha)^2 + \beta^2$ .

Dit is dus de uitleg voor de noemer. Maar de teller moet ook nog een beetje gemanipuleerd worden.

Nemen we terug formule  $i = \frac{i(0) \cdot p}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\frac{V_c(0)}{L_s}}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$  Vermits  $i(0) = I_{dc}$  kunnen we deze formule beter schrijven als

$$\frac{i}{I_{dc}} = \frac{p}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\frac{V_c(0)}{I_{dc} \cdot L_s}}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (8.4.5)$$

Vermits we moeten bekomen dat de teller  $p + \alpha$  en  $\beta$  moeten worden, kunnen we de teller ook

opdelen als volgt:  $\frac{i}{I_{dc}} = \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\frac{V_c(0)}{I_{dc} \cdot L_s} - \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$



of nog anders  $\frac{i}{I_{dc}} = \frac{1 \cdot (p + \alpha)}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{\left(\frac{V_c(0)}{I_{dc} \cdot L_s} - \alpha\right)}{\beta} \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$ . Vermits 1 en  $\frac{\left(\frac{V_c(0)}{I_{dc} \cdot L_s} - \alpha\right)}{\beta}$  allemaal constanten zijn kunnen we stellen dat als:

$$A = 1 \text{ en } B = \frac{\left(\frac{V_c(0)}{I_{dc} \cdot L_s} - \alpha\right)}{\beta}$$

onze formule (8.4.5) dan wordt

$$\frac{i}{I_{dc}} = A \cdot \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - B \cdot \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}.$$

Vermits de Laplacetransformatie van een constante de constante zelf is, is dus  $A = \text{Amplitude van de Cosinus}$  en  $B = \text{Amplitude van de sinus}$ .

Voeren we nu de inverse Laplacetransformatie uit op deze functie dan bekomen we;

$$\frac{i}{I_{dc}} = A \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) - B \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$$

Vullen we alle symbolische letters in met hun werkelijke symbolische waarden dan bekomen we

$$\frac{i}{I_{dc}} = 1 \cdot e^{\frac{-R \cdot t}{2 \cdot L_s}} \cdot \cos \left[ t \cdot \sqrt{\frac{1}{L_s \cdot C_s} - \left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2} \right] - \frac{\left(\frac{V_c(0)}{I_{dc} \cdot L_s} - \frac{R}{2 \cdot L_s}\right)}{\sqrt{\frac{1}{L_s \cdot C_s} - \left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2}} \cdot e^{\frac{-R \cdot t}{2 \cdot L_s}} \cdot \sin \left[ t \cdot \sqrt{\frac{1}{L_s \cdot C_s} - \left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2} \right]$$

Vermits  $\frac{1}{L_s \cdot C_s} = \omega_1^2 = (A_1 \cdot \omega)^2$  en  $\left(\frac{R}{2 \cdot L_s}\right)^2 = \left(\frac{R \cdot \omega_1}{2 \cdot L_s \cdot \omega_1}\right)^2 = \left(\frac{1 \cdot \omega_1}{2 \cdot Q_1}\right)^2 = \left(\frac{1 \cdot \omega \cdot A_1}{2 \cdot Q_1}\right)^2$  kunnen we de vorige uitdrukking vereenvoudigen en overzichtelijker schrijven als;

$$\frac{i}{I_{dc}} = 1 \cdot e^{\frac{-\omega \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot Q_1}} \cdot \cos \left[ \omega \cdot A_1 \cdot t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2 \cdot Q_1}\right)^2} \right] - \frac{\left(\frac{2 \cdot V_c(0)}{I_{dc} \cdot R} - 1\right)}{\sqrt{4 \cdot Q_1^2 - 1}} \cdot e^{\frac{-\omega \cdot A_1 \cdot t}{2 \cdot Q_1}} \cdot \sin \left[ \omega \cdot A_1 \cdot t \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2 \cdot Q_1}\right)^2} \right]$$

(8.4.6)

In deze vergelijking zijn  $A_1$  en  $V_c(0)$  (en  $R$ ) nog te zoeken onbekenden.

Noteer als we formule ( 8.4.1 ) vergelijken met formule (11b) die we gevonden hebben bij het oplossen

van differentieel vergelijkingen dan zien we dat  $\frac{\left(\frac{2.V_c(0)}{I_{dc}.R} - 1\right)}{\sqrt{4.Q_1^2 - 1}} = \cot g(\varphi.A1)$  . Hieruit zouden we  $V_c(0)$

kunnen afleiden.

Indien we de noemer een beetje vereenvoudigen want als  $1 \ll 4.Q^2$  dan wordt de noemer  $2.Q_1$  en

$\left(\frac{2.V_c(0)}{I_{dc}.R} - 1\right) = \cot g(\varphi.A1).2.Q_1$  en hieruit volgt dat

$$V_c(0) = I_{dc}.R(Q_1.\cot g(\varphi.A1) - 0.5)$$

wat vrij goed overeenkomt met de gevonden formule om initieel  $V_c(0)$  in te vullen.

## 8.5 Oplossing met EXEL

Hieronder een EXEL oplossing.

De gevonden polynomiaal is als volgt gedefinieerd:

$$i = \frac{i(0).p - \frac{V_c(0)}{L_s}}{p^2 + \frac{R}{L_s}.p + \frac{1}{C_s.L_s}} \quad \text{Veronderstel dat we in een glazen bol konden kijken en reeds de}$$

volgende genormaliseerde oplossingen gevonden hadden met  $\omega=1$  en  $QL=10$ :

$$i(0) = I_{dc} = 1A, V_c(0) = -8.95V, R_L = 0.5514\Omega, L_s = 5.514H, C_s = 0.211F \text{ (en } C_p = 0.374F)$$

dit geeft als eindresultaat als we de gegevens in formule (8.4.6) invullen:

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = e^{-0.05.\omega.t} [1.\cos(0.940.\omega.t) - 1.78.\sin(0.940.\omega.t)]$$

$$\text{hierin is } \frac{-\varpi.t}{2.Q_1} = \frac{2.\pi.f.R_L}{2.L_s.2.\pi.f} = \frac{-0.5514}{2 \times 5.514} = 0.05 \quad \text{en } A_1.2.\pi.f.\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2.Q_1}\right)^2} \approx 0.940$$

en  $I_o = \sqrt{1^2 + 1.78^2} = 2.041$  wat vrij goed overeenkomt met PSPICE simulaties.

De formule is op te delen in  $\frac{i_o}{I_{dc}} = F1[F2 - F3]$  waarin men duidelijk ziet dat  $F1 = e^{-0.05.\omega.t}$ ,

$F2 = 1.\cos(0.940.\omega.t)$  en  $F3 = 1.78.\sin(0.940.\omega.t)$

Noteer dat we deze formule ook zouden kunnen omvormen tot

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = e^{-0.05.\omega.t} \left[ \sqrt{1^2 + 1.78^2} \cdot \sin \left( 0.940.\omega.t - \text{tg}^{-1} \left( \frac{1}{1.78} \right) \right) \right]$$

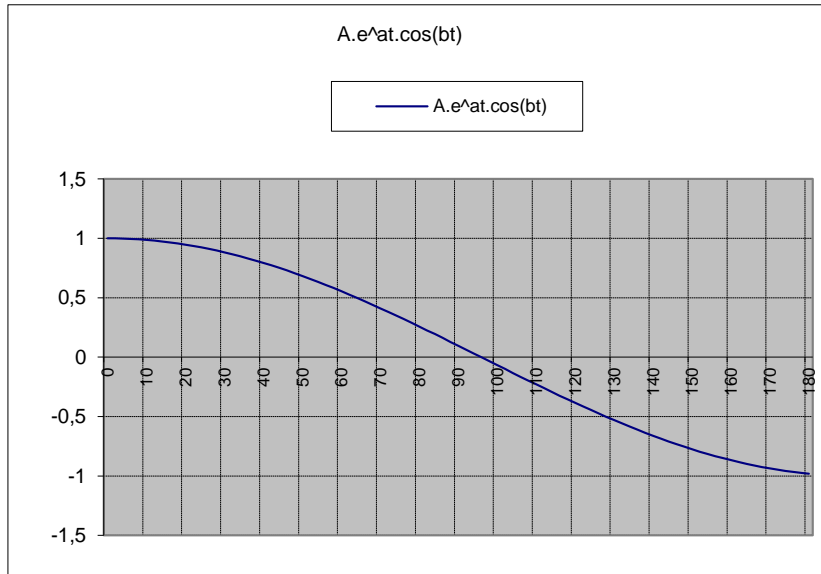


fig. 2

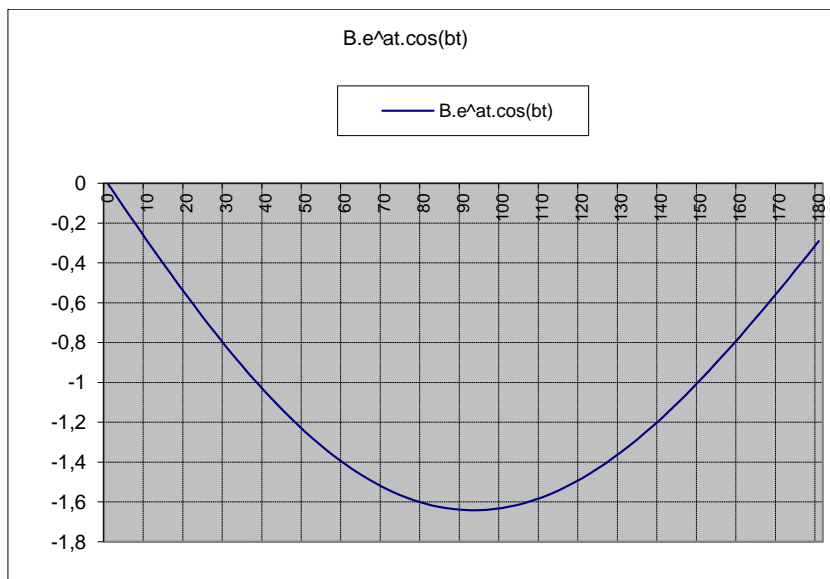
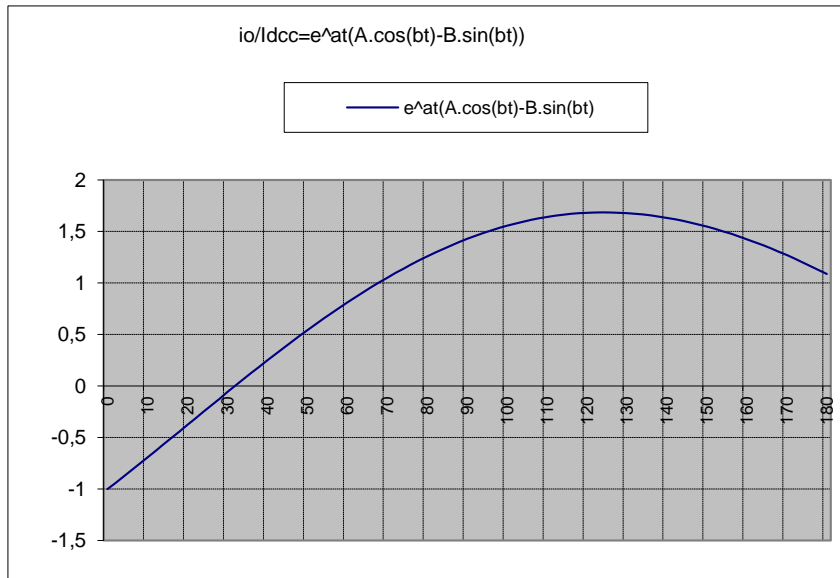


fig. 3



**fig. 4**

Wanneer we ook een formule hebben gevonden voor de tijd dat de switch open is, en beide figuren aan elkaar kunnen plakken en de nodige continuïteitvoorwaarden erin brengen dan zullen we ook in staat zijn de onbekende parameters op te lossen. Dit wil zeggen dat we dan voldoende onafhankelijke vergelijkingen hebben gevonden waarmee SOLVER een oplossing voor kan vinden.

Noteer nu al dat de Laplace transformatie een min of meer eenvoudige methode is als men de waarde van de componenten kent en men het verloop van de schakeling wil bestuderen, maar geenszins een eenvoudige methode is om analytisch de componenten te berekenen. Om de nodige vergelijkingen te bekomen moeten we ook het gedrag nagaan voor de tijd dat de switch open is.

### 8.6 Wanneer de Switch open is

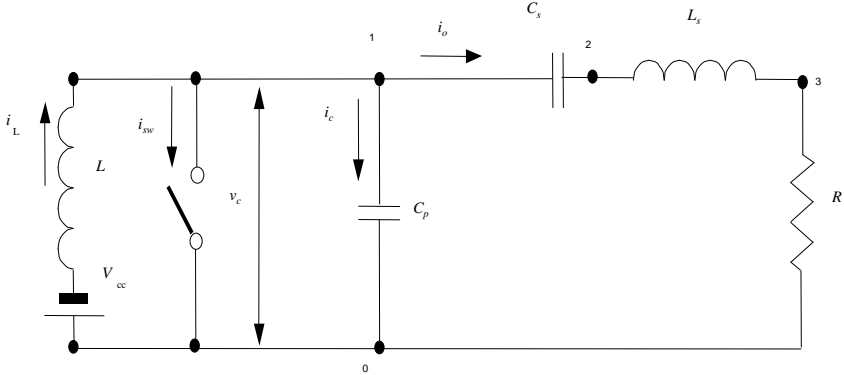


fig. 5

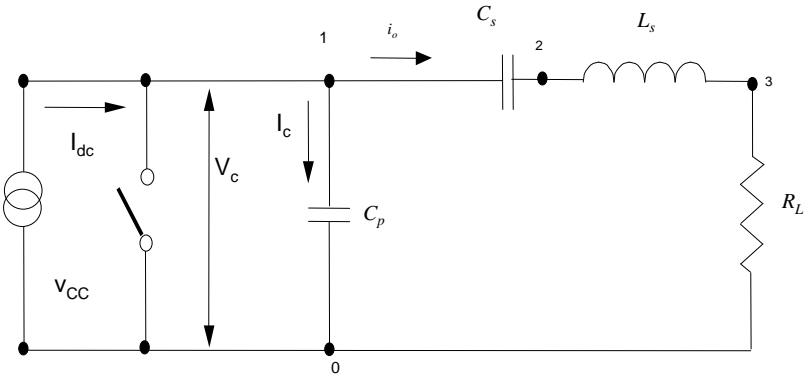


fig. 6

Wanneer de switch open is ziet het blokschema eruit als in fig. 6

Noteer dat  $I_{dc}$  een step-functie is in functie van de tijd, namelijk van 0 naar  $I_{dc}$ , en dit is dus niet te beschouwen als een constante in het domein van de Laplace transformatie. Proberen we nu de vergelijking op te stellen dan zien we dat;

$$V_c = V_{C_s} + V_{L_s} + V_{R_s}. \text{ Nu is } V_c = \frac{i_c}{C_p \cdot p}; \text{ zo ook is } V_{C_s} = \frac{i_o}{C_s \cdot p} \text{ en } V_{L_s} = i_o \cdot L_s \cdot p \text{ en } V_{R_s} = i_o \cdot R$$

Met  $I_{dc} = i_c + i_o$  volgt dat  $i_c = I_{dc} - i_o$  maar met de opmerking dat  $I_{dc}$  geen constante is, maar een step-functie, en de Laplace van een step functie is  $\frac{I_{dc}}{p}$ .

$$\frac{I_{dc} - i_o}{C_p \cdot p} = i_o \left( \frac{1}{C_s \cdot p} + L_s \cdot p + R \right)$$

$$\frac{I_{dc}}{C_p \cdot p} = i_o \left( \frac{1}{C_s \cdot p} + \frac{1}{C_p \cdot p} + L_s \cdot p + R \right)$$

$$\frac{I_{dc}}{C_p \cdot p^2} = i_o \left( \frac{1}{C_s \cdot p} + \frac{1}{C_p \cdot p} + L_s \cdot p + R \right)$$

Noemen we de parallel schakeling van  $\frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p} = \frac{1}{C_T}$  dan wordt onze vergelijking

$$\frac{I_{dc}}{C_p \cdot p^2} = i_o \left( \frac{1}{C_T \cdot p} + L_s \cdot p + R \right). \text{ Dit nu is de vergelijking zonder de begin voorwaarden. De begin}$$

voorwaarden voor de capaciteit is  $\frac{V_c(0)}{p}$  en voor de inductantie is deze  $-L_s i(0)$  zodat onze vergelijking wordt

$$\frac{I_{dc}}{C_p \cdot p^2} = i_o \left( \frac{1}{C_T \cdot p} + L_s \cdot p + R \right) + \frac{V_c(0)}{p} - L_s \cdot i(0) \text{ brengen we de termen met } i_o \text{ aan de ene kant van}$$

de vergelijking dan bekomen we  $\frac{I_{dc}}{C_p \cdot p^2} - \frac{V_c(0)}{p} + L_s \cdot i(0) = i_o \left( \frac{1}{C_T \cdot p} + L_s \cdot p + R \right)$  En nu alles op een noemer en brengen en  $L_s$  vooraan dan bekomen we

$$I_{dc} - V_c(0) \cdot C_p \cdot p + L_s \cdot i(0) \cdot C_p \cdot p^2 = i_o L_s \cdot C_p \cdot p \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} + p^2 + \frac{R}{L_s} p \right) \text{ en uiteindelijk bekomen we}$$

$$i_o = \frac{I_{dc} - V_c(0) \cdot C_p \cdot p + L_s \cdot i(0) \cdot C_p \cdot p^2}{L_s \cdot C_p \cdot p \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} + p^2 + \frac{R}{L_s} p \right)} \text{ of nog}$$

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = \frac{1 - \frac{V_c(0) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot p + \frac{L_s \cdot i(0) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot p^2}{L_s \cdot C_p \cdot p \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} + p^2 + \frac{R}{L_s} p \right)} \quad (8.6.1)$$

Deze vergelijking is van de vorm

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p (b_0 + b_1 p + b_2 p^2)}$$

welke nu in partiele fracties moet opgedeeld worden zodat we een inverse Laplace transformatie kunnen toepassen.

### Wat heb (of zou) ik op school (moeten)geleerd (hebben).

Elke functie van de vorm  $F(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 \cdots a_n \cdot p^n}{b_0 + b_1 \cdot p^1 + b_2 \cdot p^2 + b_3 \cdot p^3 \cdots b_n \cdot p^n}$  (1)

kan ontbonden worden in een functie die er uitziet als volgt;

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p^1 + a_2 \cdot p^2 + a_3 \cdot p^3 \cdots a_n \cdot p^n}{(p + x_1)(p + x_2)(p + x_3) \cdots (p + x_n)} \quad (2)$$

hierin zijn  $x_1; x_2; x_3 \cdots x_n$  = de wortels van de vergelijking van de noemer. Maar deze functie kan nog verder ontbonden worden in een vergelijking die er uitziet als;

$$F(p) = K_0 + \frac{K_1}{(p + x_1)} + \frac{K_2}{(p + x_2)} + \frac{K_3}{(p + x_3)} + \cdots \frac{K_n}{(p + x_n)} \quad (3)$$

In het merendeel van de gevallen is  $K_0 = 0$  en de andere  $K_n$  parameters kunnen gevonden worden

door alles terug op een gelijke noemer te plaatsen. Uitgewerkt voor de drie eerst wortels geeft dit;

$$F(p) = \frac{K_1 \cdot (p + x_2)(p + x_3) + K_2 \cdot (p + x_1)(p + x_3) + K_3 \cdot (p + x_1)(p + x_2)}{(p + x_1)(p + x_2)(p + x_3)}$$

en gerangschikt naar oplopende machten van  $p$  ;

$$F(p) = \frac{p^2 \cdot (K_1 + K_2 + K_3) + p \cdot [K_1 \cdot (x_2 + x_3) + K_2 \cdot (x_1 + x_3) + K_3 \cdot (x_1 + x_2)] + [K_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) + K_2 \cdot (x_1 \cdot x_3) + K_3 \cdot (x_1 \cdot x_2)]}{(p + x_1)(p + x_2)(p + x_3)} \quad (4)$$

Indien men deze vergelijking gelijkstelt aan (2) dan moeten alle machten gelijk zijn of anders gezegd;

$$a_2 \cdot p^2 = (K_1 + K_2 + K_3) \cdot p^2 \text{ ofwel } a_2 = K_1 + K_2 + K_3$$

zo ook is  $a_1 \cdot p = p \cdot [K_1 \cdot (x_2 + x_3) + K_2 \cdot (x_1 + x_3) + K_3 \cdot (x_1 + x_2)]$  ofwel

$$a_1 = K_1 \cdot (x_2 + x_3) + K_2 \cdot (x_1 + x_3) + K_3 \cdot (x_1 + x_2)$$

en zo ook is  $a_0 = K_1 \cdot (x_2 \cdot x_3) + K_2 \cdot (x_1 \cdot x_3) + K_3 \cdot (x_1 \cdot x_2)$  Indien de wortels  $x_1; x_2; x_3$ ; gekend zijn dan zijn dit drie vergelijkingen met drie onbekenden namelijk  $K_1; K_2; K_3$ ; en dus steeds oplosbaar.

Een kleine oefening om dit aan te tonen hoe het praktisch in elkaar steekt is hier zeker op zijn plaats. Nemen we als voorbeeld de vergelijking zoals we hierboven hebben gevonden voor de schakeling als de switch open is;

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} \text{ met de volgende numerieke waarden;}$$

$$a_0 = 1 \mid a_1 = -1.9 \mid a_2 = 6.2 \text{ en } b_0 = 1.4 \mid b_1 = 0.1 \mid b_2 = 1 \text{ en } c_1 = 2$$

$$\text{dan is } F(p) = \frac{1 - 1.9 \cdot p + 6.2 \cdot p^2}{2 \cdot p \cdot (1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2)} \quad (8.6.2)$$

dan kan dit volgens de regels opgesplitst worden in

$$F(p) = K_0 + \frac{K_1}{(p + x_1)} + \frac{K_2}{(p + x_2)} + \frac{K_3}{(p + x_3)}$$

Met  $K_0 = 0$  en  $x_1 = 0$  maar dan zitten we met de eerste moeilijkheid, namelijk de vergelijking  $1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2$  heeft geen rationale wortels ( $D = \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c} < 0$ ). Maar hiervoor is de volgende

oplossing voor. In dit geval kunnen we de functie splitsen in  $F(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{K_{21} \cdot p + K_{31}}{(1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2)}$  Dat dit

juist is, is eenvoudig te bewijzen. Immers  $\frac{K_2}{(p + x_2)} + \frac{K_3}{(p + x_3)} = \frac{K_2(p + x_3) + K_3(p + x_2)}{(p + x_2)(p + x_3)} = \frac{(K_2 + K_3) \cdot p + (K_2 \cdot x_3 + K_3 \cdot x_2)}{(p + x_2)(p + x_3)}$  waaruit volgt dat  $K_{21} = K_2 + K_3$  en  $K_{31} = K_2 \cdot x_3 + K_3 \cdot x_2$

dus vergelijking (8.6.2) kan dan als volgt geschreven worden;

$$F(p) = \frac{1 - 1.9 \cdot p + 6.2 \cdot p^2}{2 \cdot p \cdot (1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2)} = \frac{K_1}{p} + \frac{K_{21} \cdot p + K_{31}}{(1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2)} \text{ Hieruit volgt dat}$$

$$1 - 1.9 \cdot p + 6.2 \cdot p^2 = K_1 \cdot 2 \cdot (1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2) + K_{21} \cdot p \cdot 2 \cdot p + K_{31} \cdot 2 \cdot p$$

$1 - 1.9 \cdot p + 6.2 \cdot p^2 = 2 \cdot (1.4 \cdot K_1) + 2 \cdot (0.1 \cdot K_1 + K_{31}) \cdot p + 2 \cdot (K_1 + K_{21}) \cdot p^2$  en omdat alle machten aan elkaar moeten gelijk zijn volgt dat

$$1 = 2 \cdot (1.4 \cdot K_1) \text{ of } K_1 = 0.357$$

$-1.9 \cdot p = 2 \cdot (0.1 \cdot K_1 + K_{31}) \cdot p$  en mits invullen van  $K_1 = 0.357$  bekomen we dat

$$K_{31} = \frac{(-1.9 - 2 \times 0.1 \times 0.357)}{2} = -0.986$$



$6.2 \cdot p^2 = 2 \cdot (K_1 + K_{21}) \cdot p^2$  en met invulling van  $K_1 = 0.357$  bekomen we dat  $K_{21} = \frac{6.2 - 2 \times 0.357}{2} = 2.74$  en onze fractionele deling wordt dan

$$F(p) = \frac{K_1}{p} + \frac{K_{21} \cdot p + K_{31}}{(1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2)} = \frac{0.357}{p} + \frac{2.74 \cdot p - 0.986}{(1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2)}$$

Hoe deze uitdrukking dan nog verder kan gesplitst worden vooraleer de inverse Laplace transformatie wordt uitgevoerd volgt in het verder verloop van deze paragraaf.

Maar wat reeds opvalt is dat het tweede gedeelte van de vergelijking namelijk  $\frac{K_{21} \cdot p + K_{31}}{(1.4 + 0.1 \cdot p + 1 \cdot p^2)}$  zeer sterk gelijkt op wat we reeds hebben tegengekomen bij het oplossen van de vergelijking als de switch gesloten was. Wanneer men daarenboven nog weten dat de Inverse Laplace transformatie van  $L^{-1} \left[ \frac{K_1}{p} \right] = K_1$  dan kan men al vermoeden dat de Inverse Laplace transformatie er gaat uitzien als

$$F(t) = K_1 + K_x \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) + K_y \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$$

Een tweede opmerking is dat de Laplace transformatie wel degelijk een min of meer eenvoudige manier is om een ingewikkelde differentiële vergelijking op te lossen op voorwaarde echter dat men de numerieke waarden van de coëfficiënten  $a_n$  en  $b_n$  kent. Maar om alles volledig analytisch op te lossen, met andere woorden in symbolische uitdrukkingen, dat men dan zeer lange en ingewikkelde vergelijkingen bekomt. Hier dus ziet men ook dat zelfs de Laplace transformaties het best kan opgelost worden met numerieke getallen en mits het invoering van de nodige voorwaarden men alle mogelijke numerieke waarden kan uitproberen totdat de beste oplossing is gevonden. Zo een programma is bijvoorbeeld SOLVER in EXEL.

Nu gaan we proberen dezelfde vergelijking op te lossen maar deze keer zonder de numerieke waarden in te vullen, en alleen verder te rekenen met de symbolische waarden  $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$  en  $b_0, b_1, b_2 \dots b_n$

Dan wordt  $F(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)}$  gelijk gesteld aan

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{K_1}{c_1 \cdot p} + \frac{K_2 \cdot p + K_3}{(b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)}$$

Dan bekomen we als we alles op een gelijke noemer plaatsen dat

$$F(p) = \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{K_1 \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2) + (K_2 \cdot p + K_3) \cdot c_1 \cdot p}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)}$$

$$a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 = K_1 \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2) + (K_2 \cdot p + K_3) \cdot c_1 \cdot p$$

$$a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2 = K_1 \cdot b_0 + (K_3 \cdot c_1 + K_1 \cdot b_1) \cdot p + (K_1 \cdot b_2 + K_2 \cdot c_1) \cdot p^2$$

En hieruit volgt dat  $a_0 = K_1 \cdot b_0$  ofwel  $K_1 = \frac{a_0}{b_0}$

zo ook is  $a_1 = K_3 \cdot c_1 + K_1 \cdot b_1$  en met invullen van  $K_1 = \frac{a_0}{b_0}$  wordt  $K_3 = \frac{a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_1}{c_1 \cdot b_0}$

zo ook is  $a_2 = K_1 \cdot b_2 + K_2 \cdot c_1$  en met invullen van  $K_1 = \frac{a_0}{b_0}$  wordt  $K_2 = \frac{a_2 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_2}{c_1 \cdot b_0}$

en de vergelijking wordt  $\frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{a_0}{b_0 \cdot c_1 \cdot p} + \frac{(a_2 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_2) \cdot p + (a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_1)}{c_1 \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)}$  of  
 anders geschreven  $\frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{1}{c_1} \left[ \frac{K_1}{p} + \frac{K_2 \cdot p + K_3}{(b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} \right]$

nu zien we dat we het tweede gedeelte van de vergelijking kunnen schrijven als

$\frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{1}{c_1} \frac{K_1}{p} + K_2 \cdot \frac{p + \frac{K_3}{K_2}}{(b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)}$  Noemen we  $\frac{K_3}{K_2} = K_{32}$  dan kan de vergelijking nog anders geschreven worden, namelijk

$\frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{1}{c_1} \frac{K_1}{p} + K_2 \cdot \frac{p + K_{32}}{(b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)}$  En nu lijkt die tweede term erg op  $i = \frac{a_1 \cdot p - a_0}{b_2 \cdot p^2 + b_1 \cdot p + b_0}$  wat we hiervoor in de vergelijking met de switch gesloten hebben tegengekomen

en herleid hebben tot  $\frac{i}{I_{dc}} = A \cdot \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - B \cdot \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$  of toegepast op deze formules

wordt  $\frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{1}{c_1} \frac{K_1}{p} + K_2 \cdot \frac{p + \alpha + K_{32} - \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$  of nog verder opgesplitst

$\frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{1}{c_1} \frac{K_1}{p} + K_2 \cdot \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + K_2 \cdot \left( \frac{K_{32} - \alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$  en vullen we

terug  $K_{32} = \frac{K_3}{K_2}$  in de formule dan bekomen we;

$\frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{c_1 \cdot p \cdot (b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2)} = \frac{1}{c_1} \frac{K_1}{p} + K_2 \cdot \frac{p + \alpha}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + \left( \frac{K_3 - K_2 \alpha}{\beta} \right) \cdot \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}$

Ook in deze vergelijking is  $\alpha = \frac{b_1}{2}$  en  $\beta = \sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{4}}$

En de inverse van deze formule is dan

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = \frac{K_1}{c_1} + K_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) + \frac{(K_3 - K_2 \cdot \alpha)}{\beta} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t) \quad (8.6.3)$$

vullen we al deze parameters in dan bekommen we een uitdrukking voor  $\frac{i_o}{I_{dc}}$  gedurende de periode tussen  $\pi$  en  $2\pi$ . Noteer dat  $i_o(t \Rightarrow \pi \rightarrow 2\pi) \neq i_o(t \Rightarrow 0 \rightarrow \pi)$  wat duidelijk uit de parameters blijkt. Immers de amplitude van de *Cosinus* is gelijk aan

$$Ampl(\cos) = K_2$$

en deze van de *sinus* is

$$Ampl(\sin) = \frac{(K_3 - K_2 \cdot \alpha)}{\beta}$$

Maar er is ook nog een *DC-offset* en deze is gelijk aan

$$DC_{Offset} = \frac{K_1}{c_1}$$

Herhalen we nog even de verschillende parameters;

De gevonden polynomiaal is als volgt gedefinieerd:

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = \frac{1 - \frac{V_c(0) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot p + \frac{L_s \cdot i(0) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot p^2}{L_s \cdot C_p \cdot p \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} + p^2 + \frac{R}{L_s} p \right)} = \frac{1}{c_1} \cdot \left[ \frac{a_0 + a_1 \cdot p + a_2 \cdot p^2}{b_0 + b_1 \cdot p + b_2 \cdot p^2} \right]$$

$$c_1 = L_s \cdot C_p$$

$$K_1 = \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{\frac{1}{C_T \cdot L_s}} = C_T \cdot L_s$$

$$K_2 = \frac{a_2 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_2}{c_1 \cdot b_0} = \frac{\frac{L_s \cdot i(0) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot \frac{1}{C_T \cdot L_s} - 1 \cdot \frac{1}{C_T \cdot L_s}}{L_s \cdot C_p \cdot \frac{1}{C_T \cdot L_s}} = \frac{i(0)}{I_{dc}} - \frac{1}{L_s \cdot C_p}$$

$$K_3 = \frac{a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_1}{c_1 \cdot b_0} = \frac{\frac{-V_c(0) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot \frac{1}{C_T \cdot L_s} - 1 \cdot \frac{R}{L_s}}{L_s \cdot C_p \cdot \frac{1}{C_T \cdot L_s}} = \frac{-V_c(0)}{I_{dc} \cdot L_s} - \frac{R}{L_s} \cdot \frac{C_T}{C_p}$$

$$\alpha = \frac{b_1}{2} = \frac{R}{2 \cdot L_s}$$

$$\beta = \sqrt{b_0 - \frac{b_1^2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{C_T \cdot L_s} - \frac{\left(\frac{R}{L_s}\right)^2}{4}}$$

Noteer dat ik hier in algemene Laplace notatie geschreven heb  $V_c(0)$  en  $i(0)$  maar dat deze indicaties de spanning en de stroom zijn op tijdstip  $\omega t = \pi$  en om verwarring te vermijden ik dus  $V_c(\pi)$  en  $i(\pi)$  in het vervolg gebruik

Hieronder een EXEL oplossing. Onze vergelijking in Laplace transformatie ziet er uit als volgt;

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = \frac{1 - \frac{V_c(\pi) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot p + \frac{L_s \cdot i(\pi) \cdot C_p}{I_{dc}} \cdot p^2}{L_s \cdot C_p \cdot p \left( \frac{1}{C_T \cdot L_s} + p^2 + \frac{R}{L_s} p \right)}$$

welke dus na een inverse Laplace transformatie een tijdsfunctie geeft die er uitziet als volgt

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = \frac{K_1}{c_1} + K_2 \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \cos(\beta \cdot t) + \frac{(K_3 - K_2 \cdot \alpha)}{\beta} \cdot e^{-\alpha \cdot t} \cdot \sin(\beta \cdot t)$$

en deze functie is dan weer te splitsen in vier afzonderlijke functies;

$$\frac{i_o}{I_{dc}} = F1 + F2(F3 + F4) \text{ waarin } F1 = \frac{K_1}{c_1} \text{ en } F2 = e^{-\alpha \cdot t} \text{ en } F3 = K_2 \cdot \cos(\beta \cdot t) \text{ en uiteindelijk}$$

$$F4 = \frac{(K_3 - K_2 \cdot \alpha)}{\beta} \cdot \sin(\beta \cdot t)$$

Zou ik weer in mijn glazen bol kunnen kijken en ook weten hoe groot  $V_c(\pi)$  is en  $i(\pi)$  in te vullen in formule ( 8.5.1), maar nu met  $\omega t = \pi$  en mits invullen van de nodige parameters geeft dit de volgende EXEL resultaten.

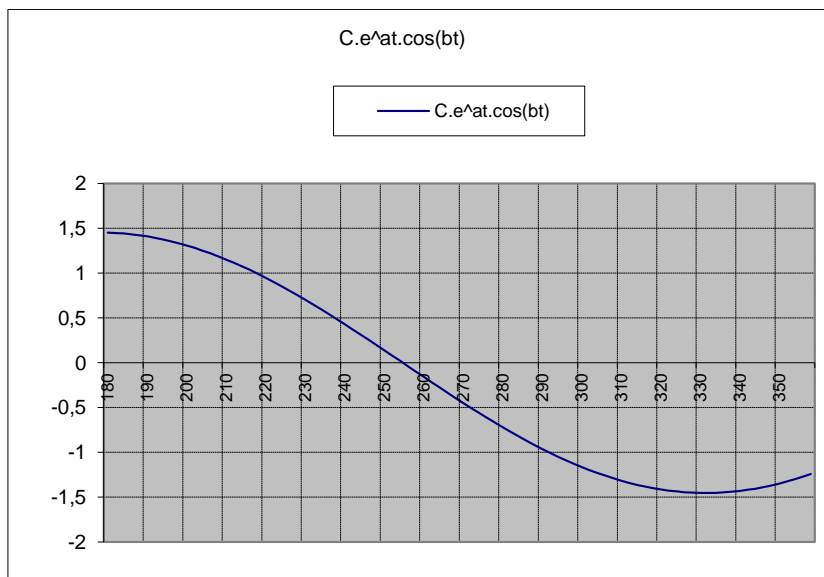


fig. 7

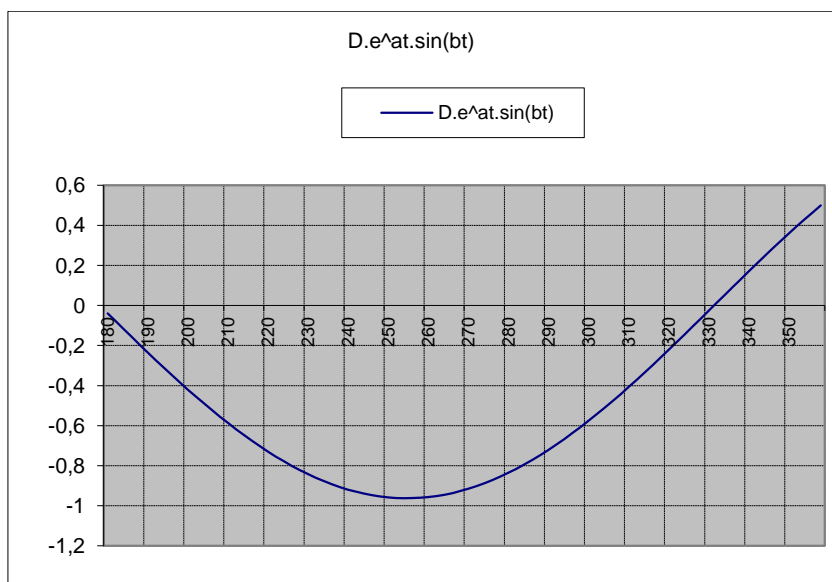


fig. 8

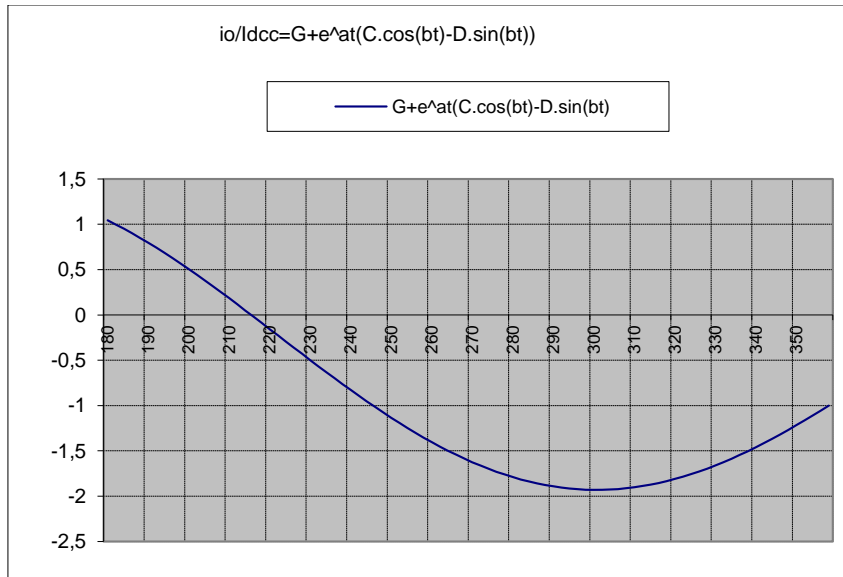


fig. 9

en het totaalbeeld van  $\frac{i_0}{I_{dc}}$ , namelijk het aaneen plakken van **fig. 7**, **fig. 8**, en **fig. 9** met voorgaande **fig. 4**

men de volgende grafiek bekomt

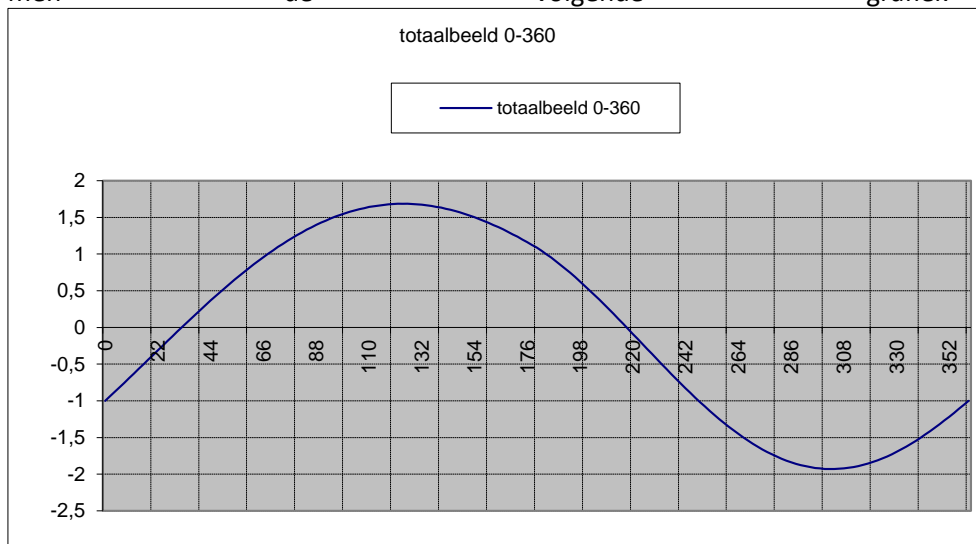


fig. 10

Wat uit deze analyse naar voor komt en duidelijk uit de **fig. 10** waarneembaar is, is dat de stroom door de belasting niet symmetrisch is ten overstaande van de 0-as. Er is door de stroombron aangeschakeld

aan het *RLC*-circuit een offset ontstaan zodat de topwaarde van de stroom in het eerst gedeelte, wanneer de switch gesloten is, lager is dan gedurende de periode dat de switch open is. Het is als het ware dat de stroombron de sinus naar beneden stuwt. Maar in feite de amplitude terug groter maakt, zodanig dat de verliezen door de demping van de belastingsweerstand terug gecompenseerd worden, gedurende de periode dat de switch open is. Noteer dat gedurende de tijd dat de switch gesloten was een toenemende stroom door de smoorspoel  $L_{fc}$  werd gepompt. Een antenne heeft hiervan weinig last mee, immers alleen **wissel-spanningen** en **wissel-stromen** spelen een rol in het uitzenden van het vermogen in de lucht, maar deze offset moet wel steeds geleverd worden door de bron en is als dusdanig te beschouwen als het extra vermogen dat telkenmale moet bijgepompt worden om het vermogen dat uitgezonden wordt te compenseren. Moest dit samenspel niet correct en automatisch verlopen dan zou ofwel de schakeling stilaan uitdoven, door de demping, ofwel naar een veel te grote oscillatie uitslingeren indien er teveel stroom wordt bijgepompt.

Een andere vaststelling, is het verschil in frequentie tussen de eerst halve-periode en de tweede halve-periode. Veronderstel dat we een lijn zouden trekken welke gelijk is aan het gemiddelde van de

amplitudes of  $I_0 = \frac{i_{o1\max} + i_{o2\max}}{2}$  en dan de halve periode gaan meten gedurende de tijd tussen 0 tot

$180^\circ$  en dit vergelijken met de halve-periode tussen  $180^\circ$  tot  $360^\circ$  dan zal me opmerken dat het eerst gedeelte slingert op een tragere frequentie dan de tweede periode. Een numerieke analyse bevestigt dat gedurende de eerst halve periode de frequentie ongeveer  $0.9426 \times \omega_0$  is en gedurende de tweede halve periode ongeveer  $1.1498 \times \omega_0$  is, wat overeen komt met  $A_1 \times \omega_0$  en  $A_2 \times \omega_0$ . De antenne heeft hier wel last van. Immers een antenne is een afgestemde kring die resoneert op  $\omega_0$ . Onvermijdelijk leidt dit tot rendementsverlies, of anders gezegd het uitzenden van extra harmonischen zal door geen enkele radio-ontvanger met een hoge selectiviteit opgenomen worden, en als dusdanig verdwijnen deze harmonischen als verloren energie in de ether.

Een andere vaststelling, die in deze figuren duidelijk naar voor komt is dat het afzonderlijk voorstellen van de functies in een cosinus en een sinus signaal **wiskundig** juist is, en samen opgeteld een mooie sinus laat zien. Maar in de praktijk, dit wil zeggen fysisch, men deze twee afzonderlijke signalen niet kan meten noch zien op bijvoorbeeld een oscilloscoop. Alleen de som van deze afzonderlijke **wiskundige** functies levert mij een **elektrisch** meetbaar signaal op dat ik kan waarnemen en meten.

Het is frustrerend hoe dikwijls men dit vergeet te vermelden, en daarenboven begrijpelijk dat vele elektronici de brui eraan geven om nog een (ingewikkelde) formule te bekijken. Het heeft geen zin om over zenders te spreken in louter abstracte wiskundige begrippen.

## 8.7 Het oplossen van deze vergelijkingen zonder voorkennis

Op de een of andere manier moeten we met deze formules de (genormaliseerde) componenten  $R_L$ ,  $L_s$ ,  $C_s$  en  $C_p$  vinden met als gekende parameters  $V_{cc} = 1$ ,  $P = 1$  en  $\omega = 2\pi \cdot f = 1$  en  $Q_L$  of  $Q_1$  vrij te kiezen tussen 3...100 en met de voorwaarde dat het rendement  $\eta \approx 100\%$  is of anders gezegd dat  $\int I_o = 1$  en  $\int V_{cp} = 1$  of althans zo dicht mogelijk benadert met de wetenschap dat  $\eta = 100\%$  niet mogelijk is, en daarenboven moet bij het sluiten van de switch de spanning over de capaciteit  $C_p = 0$  opdat de switch geen stroom zou snijden.

Juist zoals met de differentieel vergelijkingen zullen we SOLVER gebruiken om voor ons een zo goed mogelijke oplossing te vinden. En zullen we de nodige integralen numeriek berekenen, hoewel dit ook wiskundig uit te rekenen valt.

Jan Spaenjers